Lógica

Lógica Proposicional

Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Por qué un lenguaje formal

Natural vs. artificial

- como a todo el mundo, a nosotros nos gustas poder expresarnos en un lenguaje que sea fácil, cercano, intuitivo, sencillo, etc.
- sin embargo, como ya vimos, nuestro contexto exige algo que sea
  - sintácticamente preciso y no ambiguo
  - con un significado (*semántica*) unívoco, y no que una palabra pueda significar cosas distintas según algún tipo de contexto
  - cuya definición sea muy compacta (aprovechando que tiene un ámbito muy delimitado: *hechos lógicos*)

Por qué un lenguaje formal

Lenguaje vs. metalenguaje

- un lenguaje habla de la realidad no linguística
  - *el retrato está en el cofre de plata*
- un metalenguaje habla de un lenguaje
  - *"el retrato está en el cofre de plata" es una proposición verdadera*

Hay que distinguir entre

- un símbolo que significa algo distinto de sí mismo
  - *(la) plata es un metal*
- un símbolo que significa el propio símbolo
  - *plata tiene cinco letras*
- normalmente se usan "comillas" para marcar la diferencia

Proposiciones

- queremos símbolos para representar hechos lógicos, es decir, enunciados por los que tiene sentido preguntarse si son verdaderos o falsos
- los enunciados más sencillos son los que no dependen de otros
  - *llueve*
  - *Carlos gana una medalla de plata*
- los símbolos de proposición representan este tipo de hechos
  - p puede representar “llueve”
  - q puede representar “Carlos gana una medalla de plata”

Lógica proposicional: sintaxis (con algo de semántica)

Fórmulas bien formadas

- representan hechos lógicos posiblemente más complejos
- una proposición es una fórmula bien formada (fbf)
- si F y G son fbfs, entonces también son fbfs

$$\neg F \qquad \neg G \qquad F \wedge G \qquad F \vee G \qquad F \rightarrow G \qquad F \leftrightarrow G$$

- $p \rightarrow q$ puede significar "si llueve entonces Carlos gana una medalla de plata"

Ojo

- no es incorrecto usar un símbolo de proposición para representar "si llueve entonces Carlos gana una medalla de plata", pero en este caso perderíamos la *separación* entre el concepto de "llueve" y las medallas de Carlos
- F y G son metavariables: representan fórmulas cualesquiera

Lógica proposicional: sintaxis (con algo de semántica)

Sintaxis vs. semántica

- hasta ahora, la semántica se ha colado al hablar de proposiciones (para decir lo que pueden significar)
- sin embargo no hacía falta: para definir lo que es una fórmula bien formada no hace falta saber lo que dice
- lo único que necesitamos: el alfabeto $\mathcal{A}$
  - símbolos de proposición: p, q, v_{oro}, etc.
  - conectivas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (en realidad, con $\neg$ y $\wedge$ bastaría, pero lo veremos hablando de semántica)
  - símbolos de paréntesis (más adelante)
- el conjunto de las fbfs sobre $\mathcal{A}$ se llama $\mathcal{FBF}_{\mathcal{A}}$ (o simplemente $\mathcal{FBF}$)

Lógica proposicional: sintaxis (con algo de semántica)

Ejemplos de fórmulas

- correctas (bien formadas)
  - $p \wedge q \wedge r$
  - $q \rightarrow r_1 \wedge \neg r_2$
  - $CarlosGanaMedalla \wedge p \vee \neg\neg q \leftrightarrow Llueve$
  - $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$
- incorrectas (mal formadas)
  - $p\neg \wedge q$
  - $q\vee$
  - $s \vee Llueve \wedge q + s$
  - $\wedge pq$

Lógica proposicional: sintaxis (con algo de semántica)

Precedencia y paréntesis

$$q \rightarrow r_1 \wedge \neg r_2$$

- ¿qué "significa" (¡sintácticamente!)?
  - *si q entonces las dos cosas suceden: que r_1 es verdadero y que r_2 es falso*
  - *si q entonces r_1 es verdadero; en todo caso, r_2 es falso*
- se define una *precedencia* entre conectivas para decidir
  - $\neg$ mayor precedencia que $\wedge$ y $\vee$
  - $\wedge$ y $\vee$ mayor precedencia que $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$

☞ si no hay precedencia, decidimos asociar a la *derecha* (no como $+$ y $*$ en la aritmética, que asocian a la izquierda)

Lógica proposicional: sintaxis (con algo de semántica)

Ejemplos

$p \wedge q \wedge r$	*es lo mismo que*	$p \wedge (q \wedge r)$
$p \wedge q \vee r$	*es lo mismo que*	$p \wedge (q \vee r)$
$q \rightarrow r_1 \wedge \neg r_2$	*es lo mismo que*	$q \rightarrow (r_1 \wedge (\neg r_2))$
$cgm \wedge p \vee \neg\neg q \leftrightarrow ll$	*es lo mismo que*	$(cgm \wedge (p \vee (\neg(\neg q)))) \leftrightarrow ll$
$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$	*es lo mismo que*	$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$
$\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$	*es lo mismo que*	$\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg p))))))$

El uso de los paréntesis

- en estos casos los paréntesis no son realmente necesarios
- pero los necesitamos para dar otro "significado" a las fórmulas
  - $(p \wedge q) \vee r$
  - $(cgm \wedge p) \vee \neg(\neg q \leftrightarrow ll)$
  - $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$

☞ si no está del todo claro, los paréntesis se ponen

Notación infixa

- existe otra notación: la notación *infixa*
- la conectiva precede siempre sus argumentos
- $\wedge p \rightarrow q \vee rs$ en notación infixa equivale a $p \wedge (q \rightarrow (r \leftrightarrow s))$
- con la notación infixa no se necesitan paréntesis
- pero es más difícil leer las fórmulas

Semántica

El significado de las fórmulas

- según el significado que damos a los símbolos, una fórmula puede ser dos cosas: verdadera o falsa
- una valoración es una *función* de $\mathcal{FBF}_{\mathcal{A}}$ a $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$
- dada una fórmula bien formada F, una valoración V me da el valor de verdad $V(F) \in \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$

¿Qué valor de verdad?

- dado un símbolo de proposición p, una valoración V puede atribuirle el valor de verdad que quiera
  - es decir, existen dos valoraciones V_1 y V_2 tales que $V_1(p) = \mathbf{f}$ y $V_2(p) = \mathbf{v}$
- en cambio, el comportamiento de una cualquiera valoración con las conectivas es *estándar* (todas iguales)

Semántica

Fbfs y valoraciones: tablas de verdad

- para toda valoración V:

$V(F)$	$V(\neg F)$
v	**f**
f	**v**

$V(F)$	$V(G)$	$V(F \wedge G)$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**f**

$V(F)$	$V(G)$	$V(F \vee G)$
v	**v**	**v**
v	**f**	**v**
f	**v**	**v**
f	**f**	**f**

$V(F)$	$V(G)$	$V(F \rightarrow G)$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**v**
f	**f**	**v**

$V(F)$	$V(G)$	$V(F \leftrightarrow G)$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**v**

- para definir una valoración concreta, basta con especificar su comportamiento con las proposiciones (el resto es estándar)

Semántica

El significado de las conectivas

simbolizan *relaciones* entre valores de verdad

- $\neg$ (negación): *llueve* (p); *no es cierto que esté lloviendo* ($\neg p$)
- $\wedge$ (conjunción): *llueve* (p); *truena* (q); *llueve y truena* ($p \wedge q$)
- $\vee$ (disyunción): *llueve* (p); *graniza* (q); *llueve o graniza* ($p \vee q$)
- $\longrightarrow$ (implicación): *relampaguea* (p); *truena* (q); *si relampaguea entonces truena* ($p \longrightarrow q$)
  - si A entonces B; B si A; A es condición suficiente para B; A sólo si B; B es condición necesaria para A; No sucede A a no ser que suceda B
- $\longleftrightarrow$ (doble implicación): *relampaguea* (p); *truena* (q); *relampaguea si y sólo si truena* ($p \longleftrightarrow q$)
  - A si y sólo si B; A equivale a B; A es condición necesaria y suficiente para B; B es condición necesaria y suficiente para A

Semántica

Valoración de una fórmula

- del mismo modo se puede valorar una fórmula como

$$F = (cgm \wedge p) \vee \neg(\neg q \leftrightarrow ll)$$

$V(cgm)$	p	q	ll	$cgm \wedge p$	$\neg q$	$\neg q \leftrightarrow ll$	$\neg(\neg q \leftrightarrow ll)$	F
v	**v**	**v**	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**v**
v	**f**	**v**	**f**	**f**	**f**	**v**	**f**	**f**

- hay otras 14 valoraciones

Semántica

Definiciones

- V satisface F sii $V(F) = \mathbf{v}$; en este caso se dice que V es un modelo de F
- si $V(F) = \mathbf{f}$ entonces V es un contramodelo de F
- F es satisfacible si existe una valoración que la satisface (es decir, si tiene modelos)
- en caso contrario, es insatisfacible
- F es válida si todas sus valoraciones la satisfacen (es decir, si no tiene contramodelos); en este caso, se dice que es una tautología

Nota

- es nuestra terminología: en otros sitios se pueden encontrar otros nombres, pero lo importante es su significado

Pero ya es hora de poner ejemplos